

ISMERKEDÉS A HALMAZOKKAL*

BROCKHAUSER SÁNDORNÉ TÓHELYI GABRIELLA

(Közlésre érkezett: 1971. december 29.)

Társadalmunk egyik nagy igénye az általános iskola számtan-mértan tanítása felé a *függvényszerű gondolkodás kialakítása*. A másik, világszerte égető probléma az oktatás hatékonyságának növelése. Ennek érdekében újabb módszerekre van szükség, ezek közé tartozik a *programozás* is. Ezt a két igényt próbáltam dolgozatomban összekapcsolni, amikor a 8. osztályos tananyag „Függvény” c. fejezetét programozott tankönyv formájában feldolgoztam. Úgy érzem, a következő oktatási célokat kell megvalósítanunk ahhoz, hogy egészten alkossunk az általános iskola matematika-mértan tanítása a függvényszerű gondolkodás kialakításában, fejlesztésében.

a) A függvényfogalom elmélyítése

Jól lássák a tanulók, hogy két halmaz elemeinek egymáshoz rendeléséről, mégpedig kölcsönösen egyértelmű megfeleltetéséről van szó. Ennek eléréséhez úgy érzem, meg kell ismertetni a tanulókat a halmazelmélet néhány fogalmával.

b) *Megláttatni a tanulókkal, hogy egy függvénykapcsolatnak többféle megadási módja is lehet és mindegyik ugyanazt a függvényt fejezi ki.*

c) *Függvények ábrázolását jártasság szinten kialakítani, ugyanúgy*

d) *a jártasság szintet elérni a grafikon olvasásánál is.*

Ezeket a célokat megvalósítani a tankönyv felépítése alapján nem lehet. Ezért nemcsak programoztam a 8. osztályos tananyagot ezt a részét, hanem az anyag rész tárgyalásának más felépítését kellett kialakítanom.

Az anyag felépítését, logikai menetét, az órák tartalmát és sorrendjét hazai és külföldi tankönyvek, valamint az ide vonatkozó szakirodalom segítségével állítottam össze. Felhasználtam a jelenlegi feldolgozás kritikáit, a külföldi tankönyvek felépítését, ötleteit.

*Részlet az 1971-ben végzett hallgatóknak A függvény című, az általános iskolák 8. osztálya számára készült programozott anyagából. Ezzel a pályamunkával a szerző a X. országos szakmai konferencián kiemelt I. díjat nyert.

Az anyagrészt négy fő témakörre osztottam fel:

1. Pont meghatározása a síkon.
2. Bevezetés a halmazelméletbe.
3. A függvény.
4. Az egyenletek grafikus megoldása.

A következőkkel tudnám indokolni ezt a felosztást: az első órák anyagának azért választottam a koordináta-rendszer bevezetését, a pont ábrázolását, mert így nem szakítom meg a függvény tárgyalását. Ezek ismeretében ábrázolhatjuk az egymáshoz rendelt számpárokat, függvényeket.

Ez lehetővé teszi, hogy elkerüljük azokat a problémákat, amelyeket a függvény megadásánál keletkeznek. (Nem látják a tanulók, hogy a képlet, a grafikon és a táblázat ugyanannak a függvénynek más-más megadási módja.)

A jelenlegi tanterv nem tartalmazza a halmazelmélet legalapvetőbb foglmainak tanítását. Nem tartom megterhelésnek ezen ismeretek tudatosítását, mivel a gyerekek a mindennapi életben gyakran találkoznak a halmaz fogalmával — sőt, szükségesnek érzem a függvényfogalom bevezetéséhez. Ezért kb. egy órát szántam néhány alapvető halmazelméleti ismeret közlésére. Így a függvényt, mint két halmaz közötti egy-egyértelmű leképezést vezethetem be.

Ezután a lineáris függvény tárgyalása következik, majd az egyenletek grafikus megoldása.

Az így meghatározott felépítés szerint az anyagrészt tanítási egységekre bontottam, majd egy-egy egység (óra) tervezetét kb. a hagyományos módon elkészítettem.

Ezen óratervezeteket még kisebb egységekre, úgynevezett információs egységekre bontottam fel.

A részemről legjobbnak tartott, oktatási céloknak megfelelő egységeket az alkalmazott programozási formák szerint rendszereztem. Egyaránt felhasználtam a lineáris és az elágazó programok módszereit. Végül az egyes lépéseket számoztam.

Még egy feladat állt előttem, hogy megkönnyítsem a könyv használatát.

A lépések sorrendje a számozástól eltérő, így sok időt vont el az egymásutáni egységek kikeresése. Ezt próbáltam megoldani, végül is a könyv használatának leegyszerűsítésére regiszteres megoldást választottam. Sajnos a regiszter elkészítése nyomtatásban nem volt lehetséges, de a pontok számát mégis feltüntettük.

A közölt rész 2 óra anyagát dolgozza fel: 35—75. pontig. Egy-egy óra anyaga külön van regiszterezve.

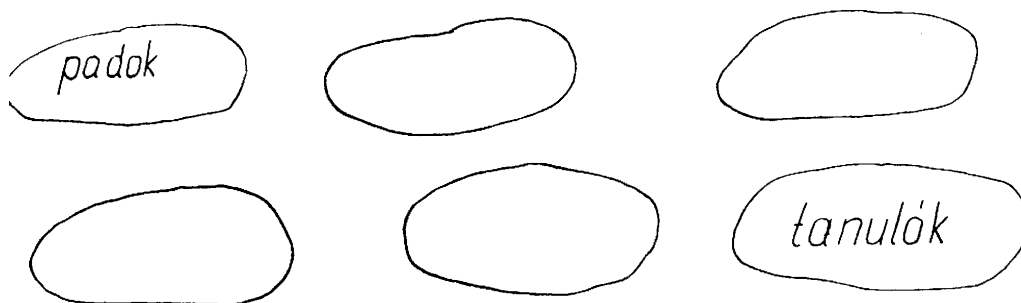
Az 1—34. pontig terjedő részben (1 óra) megismerkednek a tanulók a koordináta-rendszerrel és a pont ábrázolásával. Ezután következik a közölt rész.

A 35—51. pontig a gyerekek a legalapvetőbb halmazelméleti ismereteket sajátíthatják el. Ezek az ismeretek alapot adnak arra, hogy a

függvénykapcsolatot már két halmaz közötti, kölcsönösen egyértelmű leképezésként értelmezzék. Ez pedig már a negyedik óra anyaga az 52—75. pontig terjedő rész.

ISMERKEDÉS A HALMAZOKKAL

- 35 Nézz jól körül az osztályban! A közös tulajdonságokkal rendelkező dolgokat egy-egy külön csoportba sorold! Így dolgok, tárgyak összességét kapod. A matematika az összességek elnevezésére a halmaz szót használja.



Így kaptad a padok halmazát,
tanulók halmazát,

Ha kitöltötted, mutasd meg tanárodnak!

Majd a 36. pontnál folytatd!

- 36 ▷ *Tehát: a halmaz valamilyen szempontból közös tulajdonságú dolgok összessége.*

Számтанórákon eddig is találkoztatok halmazokkal.

Pl.: — tört számok halmaza

— síkidomok halmaza

Írj te is ilyen halmazokat!

—
—
—

Ha kitöltötted, mutasd meg tanárodnak!

37. pontnál folytatd a munkát!

40/a 1, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 27, 29

Folytasd a 41. pontnál!

37 Mit nevezünk halmaznak?

.....
.....
Ha nem jegyezted meg, többször olvasd el a 36. pontot és csak azután válaszolj a kérdésre!

38. pontnál folytasd!

38 ▷ *A halmazba sorolt dolgokat a halmaz elemeinek nevezzük.*

pl.: a Duna	— az európai folyók halmazának eleme
a trapéz	— a síkidomok halmazának eleme
a gúla	—
a	— idegen nyelvek halmazának eleme
az 1, 3, 5, 7, 11, 19, ...	—
a ..., ..., ..., ..., ...	— páros számok halmazának eleme
$a \cdot \frac{a \cdot m}{2}$; $a \cdot b$;	—

39. pontban ellenőrizheted munkádat!

42 T (természetes számok halmaza)

Természetes számok; a pozitív egész számok.

R (racionális egész számok halmaza)

Racionális egész számok; a pozitív és negatív egész számok.

Ezek ismeretében már biztosan fel tudod sorolni a T és R halmazok néhány elemét.

.....
.....

39 a gúla — a mértani testek halmazának eleme

a német nyelv — idegen nyelvek halmazának eleme
(bármilyen idegen nyelvet írtál, jól választottál.
Pl.: orosz, angol, francia ... stb.)

az 1, 3, 5, 7, 11, — a prímszámok halmazának eleme
(Ha rosszul töltötted ki, vagy nem is tudtad, akkor nézd át a 40. pontot!)

$a \cdot \frac{a \cdot m}{2}$; $a \cdot b$ — a területszámítási képletek halmazának eleme

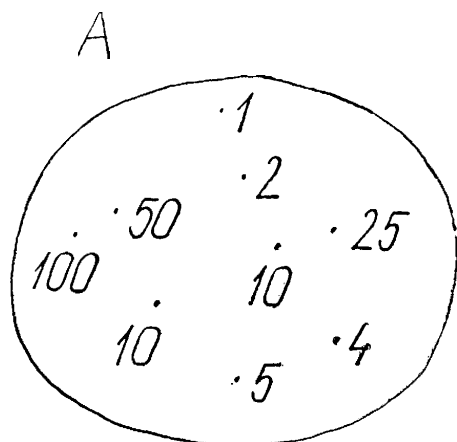
41. pontnál folytathatod.

40 Nem tudod a prímszámokat? Tanuld meg!

Egy szám osztói azok a számok, amelyekkel osztva a hányados egész szám.

- 44 ▷ A halmazokat zárt görbével határolt síkidomokkal ábrázoljuk. A halmaz elemét a zárt görbe belső pontjaiként tüntetjük fel. A görbe belső pontjai a halmaz elemei.

Pl.: 100 osztóinak a halmaza: A



A halmaznak 9 eleme van.

Az elemeket pontokkal jelöljük.

A halmaz elemei:

1, 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50, 100

Ha azt akarjuk röviden közölni, hogy pl.: 10 eleme A -nak, azt jelekkel így fejezzük ki: $10 \in A$

Olvasd! 10 eleme A halmaznak. (A 100 osztóinak a halmaza)

$1 \in A$, $2 \in A$, $4 \in A$, , , , , , , , ,
Folytasd!

100 nem osztható 3-mal. Akkor 3 nem eleme A -nak. Jelölve: $3 \notin A$

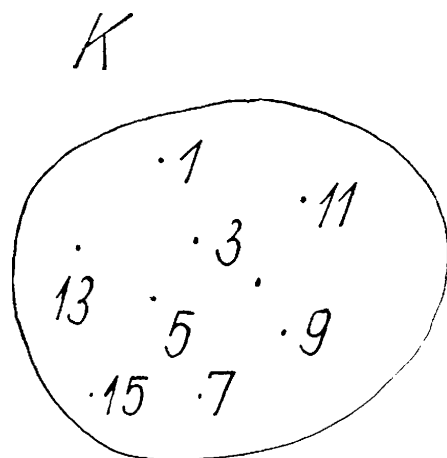
Olvasd! 3 nem eleme A halmaznak. (A 100 osztóinak a halmaza.)

Jelöld: 7 nem eleme A halmaznak:

Mit jelent: $5 \in A$?

45. pontnál folytathatod.

- 46 K halmaz elemei: 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15



$$\frac{3 \in K}{6 \in K}$$

$$\frac{4 \notin K}{1 \in K}$$

$$\frac{18 \notin K}{17 \in K}$$

$$\frac{15 \notin K}{4 \in K}$$

Ha így oldottad meg a feladatot, szépen dolgoztál. A 47. pontnál folytathatod. Ha nem ezt a megoldást adtad, akkor olvasd el még egyszer a 44. pontot, majd te is a 47. pontnál folytasd.

47 Páratlan számok halmaza legyen H !

H halmaz elemei: ..., -7 , -5 , -3 , , , , ...

A H halmaznak végtelen sok eleme van.

A H halmaznak véges sok eleme van.

(A helyes mondatot húzd alá. 48. pontnál ellenőrizd!)

49 Legyen B a 3-mal osztható számok halmaza!

A halmaz elemei: ..., -9 , -6 , -3 , 0 , 3 , 6 , 9 , ...

Így „ b ” változó bármely, 3-mal osztható szám lehet.

$$b \in B$$

Igazak-e az alábbi egyenlőségek? (Aláhúzással jelöld!)

$$b = 12$$

$$b = 9$$

$$b = 1$$

$$b = 32$$

$$b = -5$$

$$b = -3$$

Ellenőrzés az 50. pontnál!

48 Páratlan számok halmaza: H .

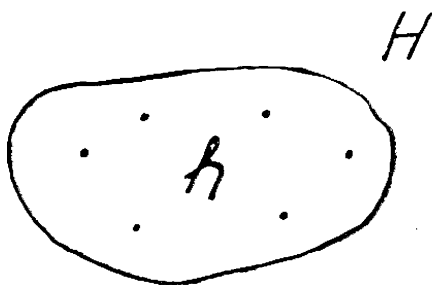
A H halmaznak végtelen sok eleme van. Így a H halmaz összes elemeit nem tudjuk felsorolni.

Ezért egy új fogalommal ismerkedünk meg!

▷ A H halmaz tetszőleges elemét h -val jelöljük.

h változó

A változó egy adott halmaz tetszés szerinti elemét jelöli.



$$h \in H$$

Pl.: $h = -11$

Írj h változó helyébe értékeket!

$h = 999$

$h = \dots\dots\dots$

$h = \dots\dots\dots$

$h = -321$

$h = \dots\dots\dots$

$h = \dots\dots\dots$

Mutasd meg tanárodnak! Az 51. pontnál folytasd!

50

$$\frac{b = 12}{b = 32}$$

$$\frac{b = 9}{b = -5}$$

$$b = 1$$

$$\underline{b = -3}$$

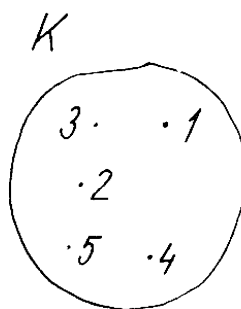
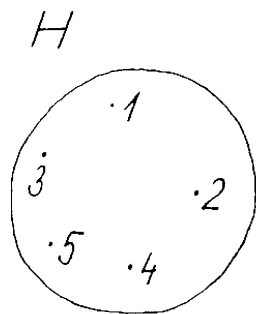
Rátérhetsz az 58. pontra!

51 Két halmaz akkor és csak akkor egyenlő, ha elemei ugyanazok.

A H és K halmaz egyenlőségét így jelöljük: $H = K$

Ha H és K halmaz nem egyenlő, akkor $H \neq K$

Egyenlő-e a két halmaz?

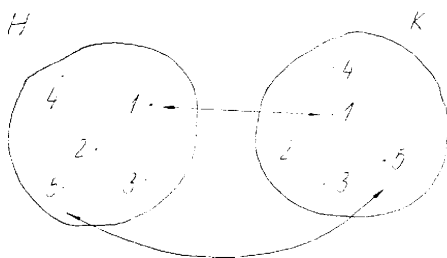


H K

52. feladatnál folytasd a munkád!

52 Két halmaz egyenlőségét hozzárendeléssel is eldönthetjük.

A H halmaz minden eleméhez hozzárendeljük K halmaz megfelelő elemét. Így egymásnak az azonos elemeket feleltetjük meg. A hozzárendelést „ \leftrightarrow ” nyilakkal jelöljük.



Folytasd!

Ezt a hozzárendelést változókkal is kifejezhetjük: $h = k$

A $h = k$ a hozzárendelés képlete.

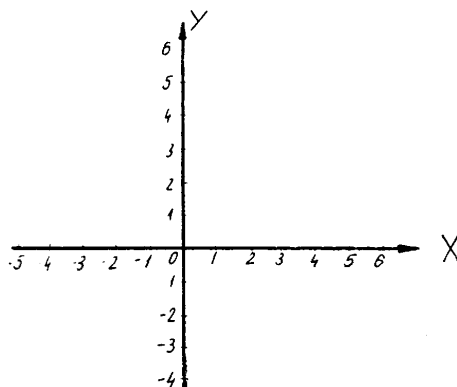
Írd le az egymáshoz rendelt
számpárokat!

(1;1) (2;2) (;)

(;) (;)

Ábrázold ezeket a számpárokat
a koordináta-rendszerben!

Munkádat az 53. pontnál ellen-
őrizd!



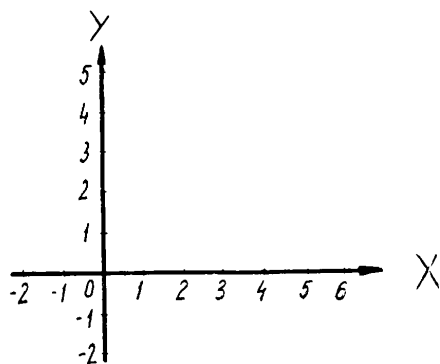
75 $y = x - 1$ függvény táblázata:

X	-1	0	1	2	3	4
Y	-2	-1	0	1	2	3

független változók halmaza

függő változók halmaza

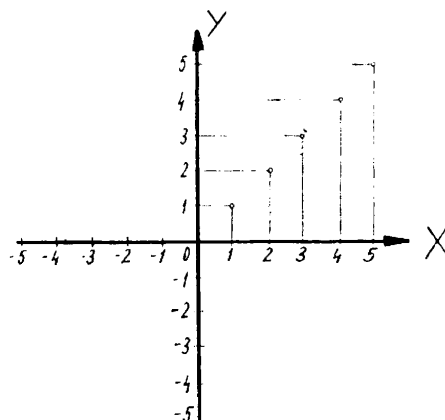
Készítsd el a függvény grafikonját!



Ellenőrizd a 77. pontnál.

- 53 Egymáshoz rendelt számpárok:
(1;1) (2;2) (3;3) (4;4) (5;5)

Az egymáshoz rendelt számpárok
ábrázolása:

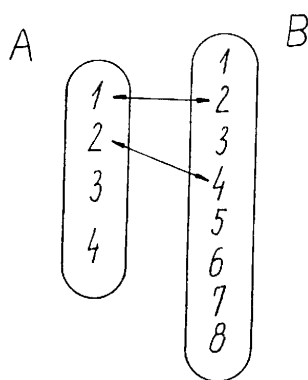


Így ábrázoltad? Igen — akkor jól dolgoztál eddig.

Ha nem, akkor olvasd el figyelmesen még egyszer a 14., 15. pontokat.

54. pontnál folytasd tovább a munkát!

- 54 Rendeld hozzá az A halmaz minden eleméhez kétszeresét a B halmaz elemeiből!



— Foglald táblázatba
az egymáshoz rendelt
számpárokat!

a	1	2	3	4
b	2			

— Fejezd ki változókkal
(képlettel) a hozzárendelést!

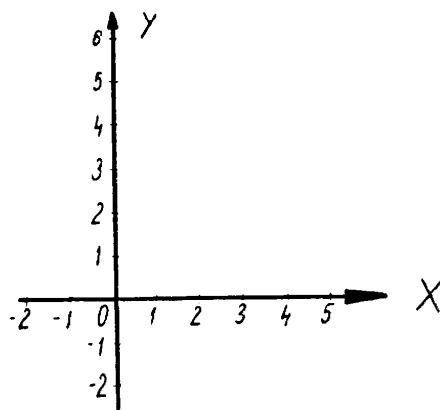
Folytasd!

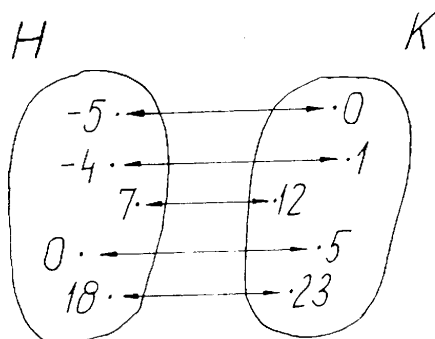
— Írd le az egymáshoz
rendelt számpárokat!

(1;2) (;) (;) (;)

— Ábrázold ezeket
a számpárokat a
koordináta-rendszerben!

Munkádat az 55. pontnál
ellenőrizd!





h	-5	-4	0	7	18
k	0	1	5	12	23

$$h + 5 = k$$

Fel kellett ismerned azt a törvényszerűséget, hogy H halmaz elemeihez 5-öt adva kapjuk a K halmaznak elemeit.

Mivel: $-5 + 5 = 0$

$$-4 + 5 = 1$$

$$0 + 5 = 5$$

Ha nem ismerted fel ezt a törvényszerűséget, akkor az 58. pontnál folytasd!

Ha jól oldottad meg a feladatodat, akkor a 60. pontnál folytathatod.

60 Az előbbi példákban:

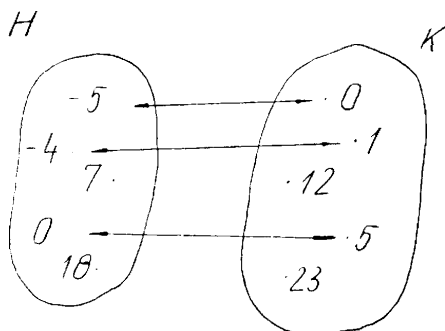
Az egyik halmaz minden egyes eleméhez a másik halmaz pontosan egy elemét rendeltük hozzá (és fordítva: a másik halmaz minden egyes eleméhez az első halmaz pontosan egy eleme felel meg.)

Ilyenkor a két halmaz között **függvénykapcsolatot** létesítettünk.

Ha egy halmaz minden egyes eleméhez egy másik halmaznak csak egy értéke rendelhető hozzá, akkor a két halmaz közötti kapcsolatot **függvénykapcsolatnak** nevezzük.

Többször olvasd el ezt a meghatározást, mondd el magadnak és csak azután folytasd a 61. pontnál!

56 H és K halmazok közötti hozzárendelést a következő ábra mutatja! Jól figyeld meg az ábrát!



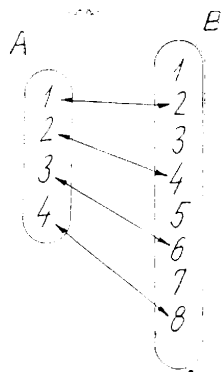
— Foglald táblázatba az egymáshoz rendelt számpárokat!

h	-5	-4	0	7	18
k	0	1	5	12	23

— Fejezd ki változókkal a hozzárendelés képletét!

Az 57. pontnál ellenőrizd!

55



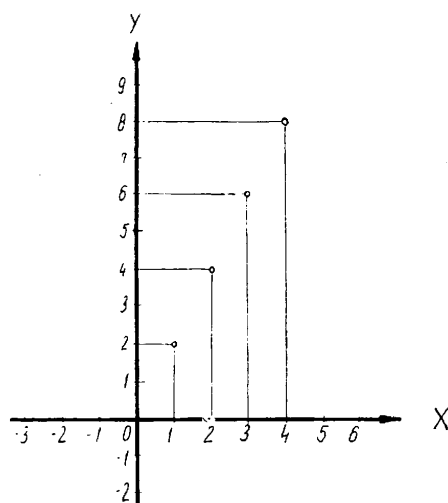
A hozzárendelést kifejező táblázat:

	1	2	3	4
	2	3	4	6

A hozzárendelés képlete: $b = 2a$

Az egymáshoz rendelt számpárok: (1;2) (2;4) (3;6) (4;8)

Ezen számpárok ábrázolása:



Reméljük,
jól oldottad meg a feladatodat!

Munkádat
az 56. pontnál folytatd!

59/a $x + 3 = y$ Te is a 60. pontnál folytatd!

64 A két hozzárendelés közül az 1. feladat fejez ki függvénykapcsolatot. Mivel az „A” halmaz minden egyes eleméhez a „B” halmaznak *csak egy* eleme felel meg, míg a 2. feladatnál a H_1 eleméhez H_2 halmaznak *több elemét* is hozzárendelhetjük.

Ha így válaszoltál, érted az eddig tanultakat! A 65. pontnál folytatd!

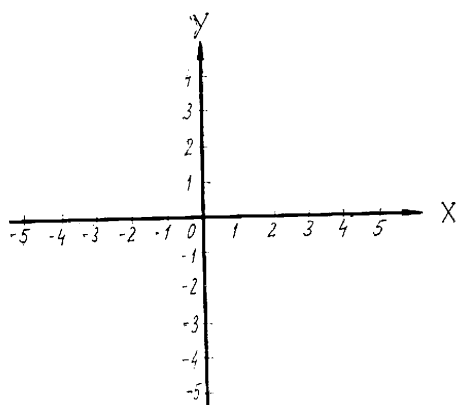
Ha rosszul válaszoltál, még egyszer figyelmesen tanulmányozd át az 57. ponttól a feladatokat.

- 65 Legyen X a racionális számok halmaza és
 Y is a racionális számok halmaza.
Minden x változóhoz rendeld hozzá a vele egyenlő y változót!
(Minden racionális számhoz rendeld önmagát!) Készíts táblázatot:

x	—	—4,5	—4		—0	0	1,5
y	—5	—1,5		—3		1	

A függvény képlete:

Ellenőrizd a 66. pontnál!



Ábrázold koordináta-rend-
rendszerben a táblázatban egy-
máshoz rendelt számpárokat! Az
 $y = x$ képlet kifejezi, hogy x
bármely értékéhez mindig lesz
 y -nak is megfelelő értéke. A
koordináta-rendszerben való áb-
rázolásnál akármilyen sűrűn
kaphatunk pontokat az eredeti
pontok közé elhelyezve. Ezek a
pontok egy *folytonos vonalon*,
egyenest helyezkednek el. Ez az
egyenest a *grafikonja* az $y = x$
függvénynek.

Rajzold be az $y = x$ függvény grafikonját!

Folytasd a 67. pontnál!

66

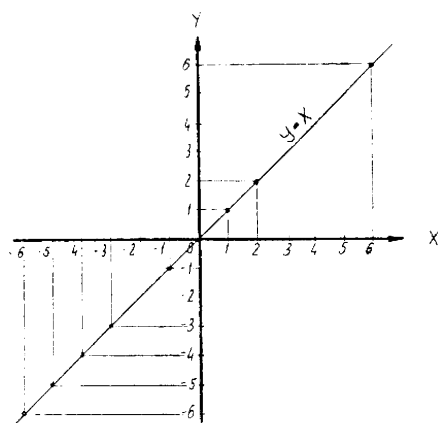
x	—	—4,5	—4	—3	—0,5	0	1	1,5
y	—5	—4,5	—4	—3	—0,5	0	1	1,5

Ha így töltötted ki a táblázatot, dolgozz tovább!

Ha nem így készítetted el a táblázatot, akkor figyelmetlenül dol-
gozol!

Még egyszer töltsd ki a táblázatot! Csak akkor folytasd a munkát,
ha a táblázat elkészítése helyes!

A függvény képlete: $y = x$



68. pontnál folytatd!

76 Két halmaz közötti hozzárendelést **függvénynek** nevezzük, ha az egyik halmaz minden eleméhez egy másik halmaznak csak egy értéke rendelhető hozzá.

68 A következő táblázatok is *függvénykapcsolatot* fejeznek ki. Az x változóhoz valamilyen szabályt követve hozzárendeltük y változót. Vizsgáld meg a számokat és határozd meg, milyen szabály szerint tölthetjük ki a táblázatokat!

— Ezek alapján töltsd ki a hiányzó helyeket!

x	1	2	3	4	5		
y	4	8	12			24	-2

.....

x	2	3	4		-3		0
y	1	1,5		2,5		-1	0

.....

x	10	2	3	5	9		3
y	0	8	7			15	6

.....

— Írd le az egyes függvénykapcsolatot képlettel!

Pl.:		0	7	4	3	-3	5,5
	y	9	2	5	6	12	3,5

$$\underline{x + y = 9}$$

A feladat megoldását a 69. pontban ellenőrizheted!

70 A mindennapi életben is gyakran találkozunk függvényekkel.

Írj 3 példát ilyen függvénykapcsolatokból!

Pl.: — Egy áru ára függ a minőségétől.

— A tanuló érdemjegye függ egész évi munkájától.

—

—

—

Mutasd meg tanárodnak! Majd a 71. pontnál folytatd!

69

x	1	2	3	4	5	6	-0,5
y	4	8	12	16	20	24	-2

$$y = 4x$$

x	2	3	4	5	-3	-8	0
y	1	1,5	2	2,5	-1,5	-4	0

$$y = \frac{x}{2}$$

x	10	2	3	5	9	-5	4
y	0	8	7	5	1	15	6

$$y + x = 10$$

70. pontnál folytatd!

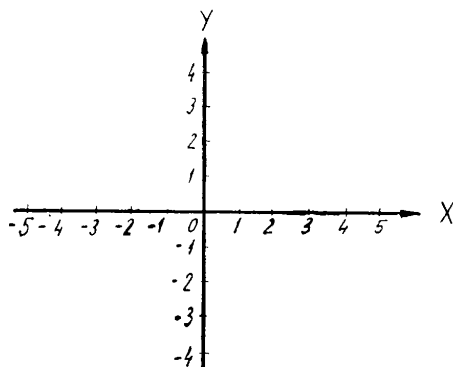
71 A következő függvénykapcsolatot képlettel adjuk meg.

Írd fel ezt a kapcsolatot táblázatban!

$$y = 3x$$

Ellenőrizd a 72. pontnál!

— Készítsd el ennek a függvénynek a grafikonját!



Ellenőrizd a 73. pontnál!

